

## ПОЛЫЕ И ТОЧЕЧНЫЕ ВИХРИ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

А. Г. Терентьев

Чувашский государственный университет  
tag@chuvsu.ru

Экспериментальные наблюдения показывают, что при обтекании препятствий в жидкости образуются полые вихри. Например, при кавитационном обтекании крыла или лопасти винта с концевых кромок сбегает полые вихри. Двумя полыми вихрями иногда заканчивается кавитационная каверна при обтекании тела. Кольцевые полые вихри образуются при натекании струи на плоскость. Находясь вблизи стенки и разрушаясь, полые вихри могут вызвать кавитационную эрозию твердых поверхностей. На рис. 1, заимствованном из экспериментальной работы Сояма, Лихтаровича и Лампарда [1], показана эрозия алюминиевой поверхности при натекании кавитационной струи.

Хотя о существовании полого вихря ничего не говорится в работе, но, вполне возможно, причиной эрозии может быть именно образование и разрушение таких вихрей. Полный вихрь представляет замкнутую область постоянного давления. Простым примером полого вихря является линии тока точечного вихря в безграничной покоящейся жидкости.

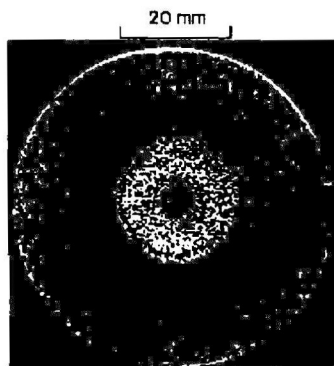


Рис. 1

Если интенсивность вихря равна  $\Gamma$ , то на окружности ради-

уса  $R$  величина скорости жидкости будет постоянной и равной  $V_0 = \Gamma/2\pi R$ . В общем случае полый вихрь в потоке отличается от окружности; его контур может быть найден лишь из решения задачи. Однако получить аналитическое решение не всегда удается, поскольку область течения является многосвязной. Наиболее удобной для аналитических исследований является двухсвязная область, например, для полого вихря вблизи стенки. Аналитические решения этой задачи и ряд числовых расчетов были получены в работах Сох А.Д., Clayden W.A.[2], Хоперскова А.Е.[3]; более полно эта задача исследована автором [4]. Постановка и решение ряда задач о течениях, индуцированных полыми вихрями в ограниченных областях, были даны Michell J.N. (1890), Pocklington H.C. (1894), Greenhill G. (1910). Дополнительные сведения можно найти в монографии Гуревича М.И. [5]

Вместо размерной скорости целесообразно ввести безразмерный параметр (число кавитации)  $K = V_0^2/V_\infty^2 - 1$ , где  $V_\infty$  – некоторая характерная скорость течения (в случае безграничной жидкости – скорость на бесконечности). Кроме числа кавитации  $K$  определяющим параметром полого вихря является величина циркуляции  $\Gamma$ . Очевидно, с увеличением числа кавитации полый вихрь в любом потоке мало отличается от окружности и при  $K \rightarrow \infty$  вырождается в точечный вихрь интенсивности  $\Gamma$ . Поэтому при изучении сложных течений имеет смысл рассматривать более простую задачу со свободными, но неподвижными точечными вихрями. Точечные вихри хорошо описаны во многих монографиях и учебниках [6].

В настоящей работе основное внимание уделено равновесным точечным и полым вихрям вблизи твердых границ. Если твердая граница представляет окружность или прямую, то можно продолжить решение через эту границу и рассмотреть течение с симметрично расположенными вихрями. Поэтому изучение системы вихрей в безграничном потоке также не лишено смысла. Равновесные вихри вблизи уступа и струйных завес были рассмотрены Д.Цельником (1965, 1966) (см. [5]).

**1. Точечные вихри в безграничной жидкости.** Пусть система  $n$  точечных вихрей обтекается безграничным потоком со скоростью  $V_\infty$ ; вихрь интенсивности  $\Gamma_k$  находится в точке  $z_k$ .

Комплексно сопряженная скорость

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{z - z_k}. \quad (1)$$

Условием равновесного положения вихря является отсутствие гидродинамической силы, т.е. локальная скорость в точках расположения вихрей должна быть равной нулю. Это приводит к  $n$  уравнениям вида

$$V_{\infty} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\Gamma_k}{z_j - z_k} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Координаты одного из вихрей можно задать, например,  $x_n = 0$ ,  $y_n = 0$ , остальные  $2n - 2$  координат  $x_k$ ,  $y_k$  вычисляются из системы уравнений (2).

**2. Периодические течения.** Совершенно аналогично можно рассмотреть обтекание системы вихрей, периодически расположенных в одном направлении, например, параллельно действительной оси. Без ущерба общности можно положить период  $L = \pi$ . Скорость основного потока будем считать равной  $V_{\infty} \exp(-\alpha i)$ . В этом случае комплексная скорость принимает вид

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} e^{i\alpha} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \operatorname{ctg}(z - z_k). \quad (3)$$

Для равновесия  $n$  вихрей в периоде необходимо, чтобы

$$V_{\infty} e^{i\alpha} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \operatorname{ctg}(z_j - z_k) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

В области одного периода теоретически возможно равновесное положение  $n$  вихрей, что соответствует  $n$  цепочкам. Для двух вихрей из (3) и (4) при  $\alpha = 0$  получаем известные цепочки Кармана [6], при  $\alpha = \pi/2$  — течение в канале шириной  $\pi/2$  с одним вихрем. Для канала справедливы следующие соотношения:  $\operatorname{tg} 2h = \Gamma/2\pi V_{\infty}$ ,  $\operatorname{ch} d = (1 + \sin^2 2h)/\cos 2h$ .

**3. Вихри в произвольном потоке.** Если аналитическое решение может быть найдено для некоторого течения без вихря, то

добавление вихря в поток не приводит к большим сложностям. Дополнительно необходимо выполнять условие равновесия

$$\oint_{z_0} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz = 0. \quad (5)$$

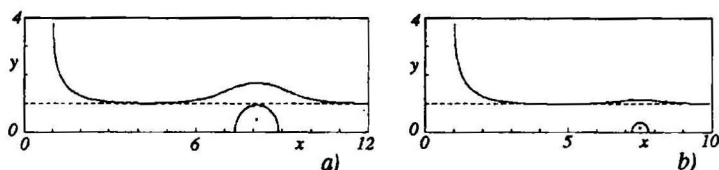


Рис. 2

На рис. 2 показано натекание струи на плоскость с одним вихрем, рассчитанное в [4]. Положение вихря определяется заданием интенсивности  $\Gamma$  и выполнением условия (5). Любопытно отметить, что расстояние вихря от оси симметрии, полученное теоретически, удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными (рис. 1). Эксперимент показывает, что струя радиуса 1мм вызывает эрозию в кольце с радиусами 3мм и 12мм, т.е. средняя величина составляет 7.5мм. Расстояние вихря от вертикальной оси, полученной теоретически, равно 8.122 на рис. 2,а и 7.493 на рис. 2,б.

**4. Обтекание двух полых вихрей.** Задача об обтекании полых вихрей относится к обратным краевым задачам о построении неизвестных границ тел по заданным на них краевым условиям. Как и в случае изолированных вихрей, количество полых вихрей должно быть не менее двух.

Для двух вихрей можно получить аналитическое решение в параметрической виде. Для этого следует конформно отобразить область течения в физической плоскости  $z = x + iy$  на внутренность прямоугольника с вершинами в точках  $0, \pi, \pi + 0.5\pi i, 0.5\pi i$  параметрической плоскости  $\zeta$ . Берега разреза, соединяющего границы полых вихрей, переходят в боковые стороны прямоугольника. Тогда искомые функции (производная комплексного потенциала  $dw/d\zeta = w_\zeta(\zeta)$  и комплексная скорость  $dw/dz = w_z(\zeta)$ ) могут быть продолжены через стороны прямоугольника на всю плоскость  $\zeta$ . В результате искомые функции будут эллиптическими с

периодами  $\pi$  и  $\pi ti$  и могут быть восстановлены по нулям и полюсам.

Приведем решение для цепочки двух полых вихрей. Здесь будем рассматривать полые вихри с одинаковыми внутренними давлениями и равными величинами циркуляции. Функции  $w_\zeta(\zeta)$  и  $w_z(\zeta)$  выражаются через тэта-функции [7] в виде:

$$w_\zeta(\zeta) = \frac{\vartheta_1(\zeta - a)\vartheta_1(\zeta - \bar{a})\vartheta_4(\zeta + a)\vartheta_4(\zeta + \bar{a})}{\vartheta_1(\zeta - b)\vartheta_1(\zeta - \bar{b})\vartheta_4(\zeta + b)\vartheta_4(\zeta + \bar{b})}, \quad (6)$$

$$w_z(\zeta) = \frac{\vartheta_1(\zeta - a)\vartheta_4(\zeta + a)}{\vartheta_1(\zeta - \bar{a})\vartheta_4(\zeta + \bar{a})}. \quad (7)$$

Обе функции, вообще говоря, должны иметь постоянные множители. Однако эти множители без ущерба общности можно положить равными единице. Это означает, что в физической плоскости зафиксирован некоторый линейный параметр, а разрез проведен таким образом, что в точке  $\zeta = 0$  комплексная скорость равна  $w_z(0)$ .

Общее решение содержит пять неизвестных параметров:  $a = a_1 + ia_2$ ,  $b = b_1 + ib_2$ ,  $t$ . Для их определения используются заданный вектор скорости на бесконечности  $w_z(b) = V_\infty \exp(i\alpha)$ , условие замкнутости каверны  $\int_0^\pi w_\zeta(\zeta)/w_z(\zeta)d\zeta$  и заданное значение циркуляции  $\int_0^\pi w_\zeta(\zeta)d\zeta = \Gamma$ . Первые два условия после выделения действительных и мнимых частей дают четыре уравнения. Таким образом, система уравнений является замкнутой. Однако решение системы уравнений представляет, в свою очередь, достаточно трудную проблему. Некоторое упрощение можно получить для конкретных задач, которые обладают той или иной симметрией.

Рассмотрим полный вихрь в канале. Из-за симметрии течения в этом случае критические точки перейдут в точки  $\zeta = a + \pi ti/4$  и  $\zeta = \pi - a + \pi ti/4$ , бесконечно удаленные точки - в точки ветвления  $\zeta = b + \pi ti/4$  и  $\zeta = \pi - b + \pi ti/4$ . Таким образом, задача имеет лишь три неизвестных параметра  $a$ ,  $b$  и  $t$ , которые определяются из условия замкнутости каверны и условий для числа кавитации и циркуляции. На рис. 3 представлены результаты расчетов. На рис. 3,а для фиксированной безразмерной величины циркуляции (циркуляция отнесена к скорости на границе каверны и ширине канала)  $\Gamma_0 = 4$  и разных чисел кавитации ( $K = 5, 25, 100, 10000$ )

показаны конфигурации полых вихрей. Из рис. 3,а видно, что при  $K \rightarrow \infty$  получается течение в канале, индуцированное полым вихрем (Michell J.N., [5]). На рис. 3,б показана конфигурация каверны для чисел кавитации  $K = 3, 5, 10, 25, 50, 100, 1000$  и фиксированном расстоянии между критическими точками ( $b = H$ ).

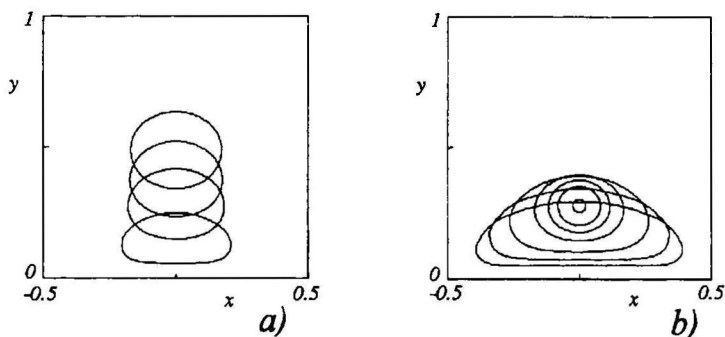


Рис. 3

В пределе при  $K \rightarrow \infty$  полый вихрь в рис. 3,б вырождается в точечный вихрь интенсивности  $\Gamma = 4.854$ , расстояние вихря от нижней стенки канала  $h/H = 0.281$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Soyama H., Lichtarowicz A., Lampard D. *Useful Correlation for Cavitating Jets*. Proc. Third Int. Symp. on Cavitation, Grenoble, France, 1998. – V. 2. – P. 147–156.
2. Cox A.D., Clayden W.A. *Air entrainment at the rear of a steady cavity*. – Cavitation of hydrodynamics, London, 1956.
3. Хоперсков А.Е. О течениях жидкости с образованием замкнутых кавитационных полостей // ПМТФ. – 1963. – N 5.
4. Терентьев А.Г. Равновесные полые и точечные вихри в потоке жидкости // Известия НАНИ ЧР, Чебоксары, 1998. – N 5, С. 66–84.
5. Гуревич М.И. *Теория струй идеальной жидкости*. – М.: Наука, 1979. – 536 с.
6. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидродинамика*. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 560 с.
7. Уиттекер Э.Е., Ватсон Дж.Н. *Курс современного анализа*. – М.: ГИФМЛ, 1963. – Т. 2. – 515 с.